Université Paul Sabatier-Toulouse III Année 2010-2011

Partiel de physique du 3 novembre 2010 (Licence 1 PC)
durée 1h30
Calculettes, téléphones, ordinateurs et documents interdits.

Notations :
Les vecteurs sont représentés en caractères gras.
Dans les équations différentielles, les dérivées première et seconde sont écrites sous la forme $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$.

Oscillations libres et forcées

1- Oscillations d'un pendule
On considère un pendule oscillant formé d'une masse m attachée à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L (figure 1). On désigne par θ l'angle entre le fil et la verticale définie par Oz. La masse est soumise à son poids $m\mathbf{g}$, à la tension du fil **T** et à une force de frottement $-\alpha$ **v**, où α est le coefficient de frottement dans l'air et **v** est la vitesse de la masse m.

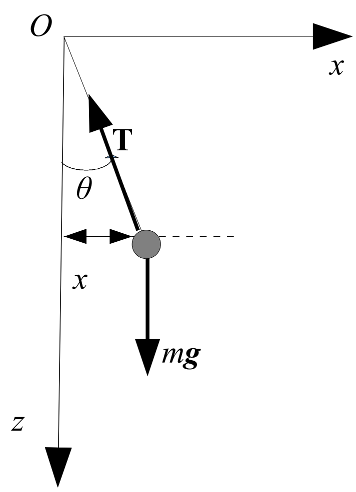

Figure 1

1.1- Appliquez la relation fondamentale de la dynamique.
1.2- On s'intéresse au mouvement de la masse m selon la direction Ox. Projetez l'équation du mouvement selon cet axe et montrez qu'elle s'écrit $m\ddot{x}=-\alpha\,\dot{x}-mg\sin\theta$ (Equation 1).
On donne : $\boldsymbol{T}=-T\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x-T\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z$, $T\approx mg$ et $\mathbf{v}=\dot{x}\,\boldsymbol{e}_x+\dot{z}\,\boldsymbol{e}_z$.
1.3- Déduisez-en qu'elle peut s'exprimer de la manière suivante : $\ddot{x}+(1/\tau)\dot{x}+\omega_o^2x=0$.
Donnez les expressions de τ et ω_o^2 . Que représentent τ (ou $1/\tau$) et ω_o ?
1.4- Les solutions sont du type $K\exp(rt)$. Résolvez l'équation dans le cas d'un amortissement très faible tel que $\tau\,\omega_o\gg 1/2$.
1.5- Toujours dans la même approximation, montrez que la solution peut s'écrire sous la forme $x(t)=\exp(-t/2\tau)[A\exp(i\omega_o t)+B\exp(-i\omega_o t)]$.
1.6- Calculez A et B en considérant qu'à l'instant initial le pendule est à sa position d'équilibre et est animé d'une vitesse v_o. Donnez l'expression de $x(t)$ et tracez l'allure de la courbe.

2- Oscillation du pendule en régime forcé

Le point S où est fixé le pendule est maintenant soumis à une excitation permanente sous la forme d'une oscillation $X_s = X_{sm}\cos(\omega\, t)$.

Le mouvement à un instant t donné peut être représenté par la figure 2 ci-dessous.

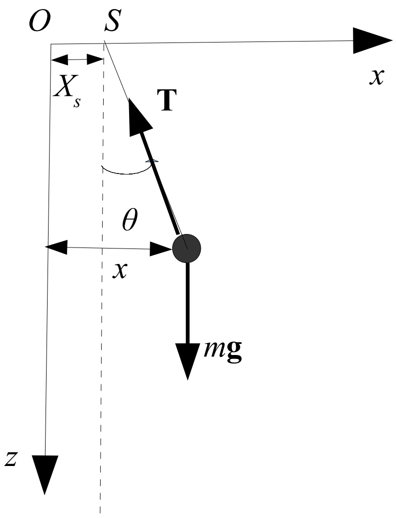

Figure 2

2.1- L'équation du mouvement selon Ox est la même que l'équation 1 donnée en 1.2. Ecrivez $\sin\theta$ en fonction de X_s et x et montrez que l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{x} + (1/\tau)\,\dot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 X_{sm}\cos(\omega t) \quad \text{(Equation 2).}$$

2.2- Justifiez que la solution $x(t)$ de l'équation 2 est la somme de deux contributions.

2.3- Donnez sans calcul la solution de l'équation homogène (sans second membre) Justifiez que l'on peut ne s'intéresser qu'au régime permanent.

2.4- Quelle forme proposez-vous pour la solution $x(t)$ en régime permanent ? Définissez les trois paramètres intervenant dans cette expression.

2.5- Il est commode de résoudre l'équation du mouvement en régime permanent en utilisant la notation complexe. On pose $\underline{X_s}(t) = X_{sm}\exp(i\omega t)$ et $\underline{x}(t) = x_m \exp[i(\omega t + \phi)]$.

Montrez que l'amplitude de l'élongation s'écrit :

$$x_m = \frac{\omega_o^2 X_{sm}}{\sqrt{[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2]}} \quad \text{(Equation 3)}$$

et que la phase est donnée par:

$$\tan\phi = \frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_o^2} \quad \text{(Equation 4).}$$

2.6- On montre qu'il existe une fréquence de résonance ω_m proche de ω_o dans le cas où l'amortissement est très faible. Tracez la courbe de résonance. Précisez la valeur $x_m(\omega_o)$ et les cas limites $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.

2.7- Quel est le déphasage ϕ à basse fréquence ($\omega << \omega_o$), à la résonance ($\omega = \omega_o$), et à haute fréquence ($\omega >> \omega_o$). Tracez l'allure de la courbe $\phi(\omega)$.